3. Кондратьев Б. *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями*. – М.: Мир, 2007. – 506 с.

4. Новиков П. С. *О единственности решения обратной задачи теории потенциала*// Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18. – № 4. – С. 165–168.

5. Сретенский Л. Н. *О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала*// Доклады АН СССР. – 1954. – Т. 99. – № 1. – С. 21–22.

6. Иванов В. К. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала*// Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 105. – № 3. – С. 409–412.

7. Цирульский А. *Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей*. – Свердловск: УрО АН СССР, 1990. – 258 с.

8. Абубакиров Н. Р., Аксентьев Л. А. *О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 10. – С. 65–69.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF THE LOGARITHMIC POTENTIAL WITH A FINITE NUMBER OF PARAMETERS

N.R. Abubakirov, L.A. Aksentev

In the direct problems we know a domain D and find the gradient of the potential inside or outside of this domain. In the inverse problems we know the gradient of the potential near infinity and find a domain D. Also we consider direct and inverse problems for the gradient of the logarithmic potential of the simple layer with different types of the contours and new class of the gradient functions.
Keywords: logarithmic potential, gradient, integral equation.

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА РЕЛЛИХА С ВЕСАМИ

Ф.Г. Авхадиев[1]

1 *avkhadiev47@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Мы определяем специальные функционалы как точные константы в интегральных неравенствах для пробных функций, заданных в областях на плоскости. Получены аналоги и обобщения классического результата Ф. Реллиха для двумерного случая, когда требуются дополнительные условия на коэффициенты Фурье пробной функции.

Ключевые слова: неравенство Реллиха, конформные отображения, равномерно совершенное множество.

Рассматриваются области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Пусть $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z = x + iy \in \Omega$ до границы области. Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим множество гладких комплекснозначных функций, имеющих компактные носители в области $\Omega \neq \mathbb{C}$. Во многих работах изучалось следующее вариационное неравенство типа Реллиха

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta f(z)|^2}{(\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{-2+2n}}\,dx\,dy \geq c_{2n}(\Omega) \iint_\Omega \frac{|f(z)|^2}{(\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{2+2n}}\,dx\,dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (1)$$

где $z = x + iy \in \Omega$, Δ — оператор Лапласа, n — фиксированное вещественное число, константа $c_{2n}(\Omega) \in [0,\infty)$ предполагается наибольшей из возможных, т.е. она определяется формулой

$$c_{2n}(\Omega) = \inf_{f\in C_0^\infty(\Omega), f\not\equiv 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta f(z)|^2 (\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{2-2n}\,dx\,dy}{\iint_\Omega |f(z)|^2 (\mathrm{dist}(z,\partial\Omega))^{-2-2n}\,dx\,dy}.$$

Отметим, что $c_{2n}(\Omega)$ — инвариант линейных конформных преобразований, т.е. $c_{2n}(\Omega) = c_{2n}(a\Omega + b)$, где $a\Omega + b = \{w \in \mathbb{C} : w = az + b, z \in \Omega\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Неравенство (1) хорошо изучено для случая, когда область $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и, очевидно, $\mathrm{dist}(z, \partial(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = |z|$. В частности, Ф. Реллих доказал (см. [1]), что $c_{21}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$, но для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cos\theta\, d\theta = 0 \quad (\forall r \in (0,\infty)),$$

справедливо неравенство

$$\iint_{\mathbb{C}} |\Delta f(z)|^2\, dx\,dy \geq \iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|^2}{|z|^4}\, dx\,dy$$

с точной константой 1 вместо $c_{21}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$.

Кроме того, в статье [2] П. Калдироли и Р. Мусина доказали, что $c_{2n}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$ для любого целого числа n. Мы дополняем эти результаты следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, и пусть функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \sin n\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cos n\theta\, d\theta = 0 \quad (\forall r \in (0,\infty)).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\iint_{\mathbb{C}} |\Delta f(z)|^2 \frac{dx\,dy}{|z|^{-2+2n}} \geq (2|n| - 1)^2 \iint_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \frac{dx\,dy}{|z|^{2+2n}}. \tag{2}$$

Постоянная $(2|n| - 1)^2$ является точной, т.е. максимальной из возможных в неравенстве (2) для указанного класса функций.

Предположим теперь, что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет не менее двух граничных компонент. Через $M(\Omega)$ обозначим точную верхнюю границу конформных модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих границу Ω. Если область Ω односвязна и $\Omega \neq \mathbb{C}$, то полагаем $M(\Omega) = 0$ по определению.

Очевидно, $0 \leq M(\Omega) \leq \infty$ и $M(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \infty$. Отметим также, что область с конечным максимальным модулем $M(\Omega)$ имеет равномерно совершенную границу. Справедливо и обратное утверждение. Ряд примеров таких областей и нетривиальные критерии конечности $M(\Omega)$ можно найти в работах [3] и [4].

В монографии [5], опубликованной в 2015 году, читатель может найти базовые результаты по неравенствам типа Харди и Реллиха с полными доказательствами. Несколько утверждений о функционалах $c_{20}(\Omega)$ и $c_{21}(\Omega)$ получены нами в 2016 году. В частности, в [6] доказано, что

$$c_{20}(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow c_{21}(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow M(\Omega) < \infty.$$

Кажется вероятным, что этот результат можно распространить на функционалы $c_{2n}(\Omega)$ для произвольного $n \in \mathbb{Z}$. Но к настоящему времени удалось подтвердить эту гипотезу лишь частично. А именно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область с максимальным модулем $M(\Omega)$. Если $M(\Omega) = \infty$, то $c_{2n}(\Omega) = 0$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17–01–00282.

Литература

1. Rellich F. *Perturbation theory of eigenvalue problems.* – New York-London-Paris: Gordon and Breach, 1969.

2. Caldiroli P., Musina R. *Rellich inequalities with weights* // Calc. Var. – 2012. – V. 45. – P. 147-164.

3. Carleson L., Gamelin T. W. *Complex dynamics.* – New-York: Springer, 1993.

4. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick type inequalities* – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.

5. Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* – Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer, 2015.

6. Avkhadiev F. G. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space* // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – V. 442. – P. 469-484.

GENERALIZATIONS OF A RELLICH INEQUALITY WITH WEIGHTS

F.G. Avkhadiev

We determine some special functionals as sharp constants in integral inequalities for test functions, defined on plane domains. We prove analogs and generalizations of a classical Rellich result for two dimensional case, when there is an additional restriction on Fourier coefficients of the test functions.

Keywords: Rellich inequality, conformal mapping, uniformly perfect sets.

УДК 517.968

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБНО–ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], А.Ф. Галимянов[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *anis_59@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье решается задача оптимизации полиномиальных проекционных методов решения периодических уравнений с дробно-интегральным оператором Вейля в главной части. Для класса регуляризованных интегральных уравнений дробного порядка, задаваемых принадлежностью коэффициентов фиксированному классу Гельдера, в паре пространств гельдеровых функций доказана оптимальность по порядку точности известных методов: Галеркина по тригонометрической системе функций, коллокации